

Maciej Redlicki

Kolegium Zarządzania i Finansów
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Krzysztof Borowski

Kolegium Zarządzania i Finansów
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Wykorzystanie trzyczynnikowego modelu Famy-Frencha na GPW

Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiony został model trzyczynnikowy Famy-Frencha. Zbadane zostały możliwości jego wykorzystania na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Przedstawione rezultaty badania, dotyczącego okresu od kwietnia 2004 do czerwca 2015, wskazują na dobre dopasowanie oszacowanego, za pomocą metody najmniejszych kwadratów, modelu do stóp zwrotu z portfeli skonstruowanych na podstawie kapitalizacji oraz poziomu BV/MV. Model słabiej radzi sobie z opisywaniem zwrotów z portfeli o średniej kapitalizacji ze względu na ich wyższe stopy zwrotu w porównaniu z małymi i dużymi spółkami.

Słowa kluczowe: model trzyczynnikowy, model Famy-Frencha, SMB (Small Minus Big), HML (High Minus Low)

Kody klasyfikacji JEL: G11, G12, G14

1. Wprowadzenie

Niemalże od początków istnienia rynków finansowych badacze nie ustają w próbach opisanie zjawisk zachodzących na rynkach finansowych. Szczególnie od początku XX w. można zaobserwować coraz większe zintensyfikowanie badań na temat zachowania się rynku kapitałowego. Jednym z efektów takich poszukiwań są modele opisujące przewidywane zachowanie się cen aktywów, często wykorzystywane w praktyce przez fundusze inwestycyjne, jak również przez inwestorów indywidualnych. Jednym z tego typu modeli jest tzw. trzyczynnikowy model wyceny aktywów, zaproponowany przez Eugene Fama i Kennetha Frencha¹. Uważa się, że model ten dokładniej odzwierciedla zachowanie się aktywów na giełdzie nowojorskiej (NYSE) i innych rozwiniętych rynkach niż chociażby powszechnie używany model CAPM.

Celem artykułu jest sprawdzenie, czy trzyczynnikowy model Fama-Frencha może być stosowany do opisu stóp zwrotu na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW). W pierwszej części artykułu przedstawiony zostanie najważniejszy poprzednik modelu trzyczynnikowego, jakim jest CAPM, oraz problemy, które ograniczają możliwości predykcyjne tego modelu. Następnie zostanie szczegółowo omówiony model trzyczynnikowy, a w dalszej części artykułu będą zaprezentowane i omówione wyniki stosowania modelu trzyczynnikowego na GPW.

2. Ujęcie teoretyczne

Model wyceny aktywów kapitałowych (ang. *Capital Assets Pricing Model*, CAPM) jest niewątpliwie jedną najpowszechniej wykorzystywanych w praktyce teorii finansowych. Uważa się, że jego autorami są niezależnie od siebie William Sharpe, John Lintner i Jan Mossin². Model ten opiera się na osiągnięciach teorii portfelowej. Jego wzór przedstawia następujące równanie³:

¹ E. Fama, K. French, *Common Risk Factors in the Returns on Stock and Bonds*, „Journal of Financial Economics” 1993, vol. 33, s. 3–56.

² W. Dębski, *Rynek finansowy i jego mechanizmy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007, s. 531.

³ W. Sharpe, *Capital Assets Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, „Journal of Finance” 1964, vol. 19, s. 425–442.

$$r_i = r_f + \beta (r_M - r_f) \quad (1)$$

gdzie:

r_i – stopa zwrotu dla i -tej spółki,

r_f – stopa zwrotu aktywów wolnych od ryzyka,

r_M – rynkowa stopa zwrotu,

β – współczynnik ryzyka systematycznego.

Pomimo bezspornej łatwości aplikacyjnej modelu CAPM, model ten nie jest pozbawiony wad. Już w 1978 r. R. Ball⁴ wskazał na możliwe słabe strony tego modelu, czyli tylko jeden czynnik określający stopę zwrotu. Przedstawił on takie wskaźniki, jak P/E (cena/zysk), BV/MV (wartość księgową/wartość rynkową) czy D/MV (wielkość długu/wartość rynkową), jako potencjalne zmienne objaśniające w modelach wyceny, gdyż biorą one pod uwagę cenę aktywów, a ta wraz ze znaną oczekiwaną dywidendą może określać przyszłą stopę zwrotu. W kolejnych opracowaniach, wykorzystując wspomniane czynniki, wykazywano, że współczynnik β nie w pełni opisuje stopy zwrotu z poszczególnych aktywów. R. Banz⁵ wykazał, że małe spółki (o niskiej kapitalizacji) wykazują się wyższymi niż przeciętne, średnimi stopami zwrotu. S. Basu⁶ przedstawił negatywną zależność między wskaźnikiem P/E (cena/zysk) a średnimi stopami zwrotu, która nie jest objaśniana w modelu CAPM. Kolejnym podważeniem wiarygodności modelu stworzonego przez Sharpe'a, Lintnera i Mossina było wykazanie relacji między wskaźnikiem wartości księgowej do rynkowej (BV/MV) a stopami zwrotu⁷. Kolejną zmienną mającą wpływ na stopy zwrotu był poziom dźwigni, co wykazał L. Bhandari⁸.

Każde z tych badań wskazywało na istnienie anomalii w funkcjonowaniu modelu CAPM, który, co jasne, nie mógł objaśniać stóp zwrotu wszystkich spółek. Jednakże dopiero zebranie tych badań w całość pozwoliło na wysunięcie wniosku, że skuteczność modelu CAPM jest ograniczona. W ponownie przeprowadzonych przez

⁴ R. Ball, *Anomalies in Relationships between Securities' Yields and Yield-Surrogates*, „Journal of Financial Economics” 1978, vol. 6, s. 103–126.

⁵ R. Banz, *The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks*, „Journal of Financial Economics” 1981, vol. 9, s. 3–18.

⁶ S. Basu, *The Relationship between Earnings' Yield, Market Value and Return for NYSE Common Stocks: Further Evidence*, „Journal of Financial Economics” 1983, vol. 12, s. 129–156.

⁷ B. Rosenberg, K. Reid, R. Lanstein, *Persuasive Evidence of Market Inefficiency*, „Journal of Portfolio Management” 1985, vol. 11, s. 9–16.

⁸ L. Bhandari, *Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence*, „Journal of Finance” 1988, vol. 43, s. 507–528.

siebie badaniach, dotyczących występowania powyższych anomalii, Fama i French potwierdzili, że współczynnik β nie wystarczy do opisanego stóp zwrotu aktywów giełdowych⁹. Ponadto wykazali, że wskaźnik BV/MV w wystarczającym stopniu opisuje wpływ poziomu dźwigni finansowej (mierzonej jako D/MV i D/BV, gdzie D – oznacza poziom zadłużenia analizowanej spółki) na stopy zwrotu oraz że wpływ wskaźnika P/E może zostać zastąpiony przez kombinację czynników: BV/MV i wielkości spółki. Takie stwierdzenia stanowiły prostą drogę do stworzenia nowego modelu wyceny aktywów, opartego na zaprezentowanych czynnikach ryzyka.

2.1. Model trzyczynnikowy

Wykorzystując dorobek swojej wcześniejszej pracy, Fama i French w 1993 r. przedstawili światu nowy model wyceny aktywów. Opierał się on na trzech czynnikach ryzyka. Pierwszym z nich był czynnik rynkowy znany z modelu CAPM. Do niego został dodany czynnik opierający się na wielkości spółki oraz na wskaźniku wartości księgowej do rynkowej. Oczekowaną stopę zwrotu z modelu można określić równaniem¹⁰:

$$r_i = \alpha + r_f + \beta_M (r_M - r_f) + \beta_{SMB} SMB + \beta_{HML} HML + \varepsilon \quad (2)$$

gdzie:

SMB – różnica między średnią stopą zwrotu spółek o niskiej kapitalizacji i średnią stopą zwrotu spółek o wysokiej kapitalizacji,

HML – różnica między średnimi stopami zwrotów spółek o wysokim i niskim współczynniku BV/MV,

ε – wyraz wolny modelu;

$\beta_M, \beta_{SMB}, \beta_{HML}$ – wrażliwość portfela na zmiany określonych czynników.

Należy nadmienić, że współczynnik β_M nie jest równoznaczny z tym, z modelu CAPM.

Fama¹¹ wskazuje na to, że model ten jest modelem empirycznym, a nie standardowym. Standardowy model wyceny aktywów na podstawie przyjętych założeń

⁹ E. Fama, K. French, *The Cross-Section of Expected Stock Returns*, „Journal of Finance” 1992, vol. 47, s. 427–465.

¹⁰ E. Fama, *Two Pillars of Asset Pricing*, „The American Economic Review” 2014, vol. 104, s. 1467–1485.

¹¹ Ibidem, s. 1480.

oraz relacji między czynnikami ryzyka a stopą zwrotu szacuje, jakie powinny być jej oczekiwane wartości. Model empiryczny opiera się natomiast na danych historycznych, traktując wszelkie powtarzające się wzory stóp zwrotu jako dane i proponując dopasowane do nich parametry najlepiej opisujące stopy zwrotu.

W trzyczynnikowym modelu Fama-Frencha pierwszą zmienną objaśniającą jest premia za ryzyko rynkowe ($r_M - r_f$). Czynniki te są identyczne jak w modelu CAPM, dlatego nie wymaga dalszego opisu. SMB (Small Minus Big) obrazuje różnicę między stopą zwrotu ze zdywersyfikowanego portfela spółek o niskiej kapitalizacji a stopą zwrotu zdywersyfikowanego portfela dużych spółek (o wysokiej kapitalizacji). Fama i French wyjaśniają¹², że rozmiar firmy jest powiązany z ryzykiem ze względu na to, że małe firmy doświadczają okresów, w których przychody znacząco spadają, natomiast duże firmy są bardziej odporne na wahania przychodów. Z wielkością spółki związane jest też ryzyko płynności. Firmy o dużej kapitalizacji rynkowej charakteryzują się o wiele wyższymi obrotami w ujęciu nominalnym niż spółki o małej kapitalizacji. W związku z tym znalezienie nabywcy dla dużego pakietu akcji spółki o małej kapitalizacji jest niezmiernie trudne. Z tego powodu ten rodzaj ryzyka inwestycyjnego powinien być teoretycznie rekompensowany wyższymi stopami zwrotu z inwestycji w akcje spółek o małej kapitalizacji. Także czynniki HML (High Minus Low), wyrażający różnicę między zwrotami z portfeli spółek o wysokim i niskim współczynniku BV/MV, wiąże się z ryzykiem inwestycyjnym. Firmy o wysokiej wartości księgowej w stosunku do rynkowej zazwyczaj mają stale (przez ok. 5 lat) niższą stopę zwrotu z aktywów niż spółki o niskim stosunku BV/MV¹³. Ponadto dzięki obliczaniu wartości czynników SMB oraz HML na podstawie portfeli, eliminowane jest ryzyko specyficzne spółek, a w modelu prezentowane są jedynie zwroty związane z wielkością czy wartością firmy, a nie dotyczące innych cech konkretnych spółek.

Czynniki SMB i HML uzależnione są również od danych makroekonomicznych, co zostało wykazane w pracy M. Vassalou¹⁴. Przeprowadzone badania dla 10 wysoko rozwiniętych państw udowodniły, że czynniki te zawierają informacje o prognozach wzrostu PKB. Ponadto jest uwzględniona w AMB i HML obecna premia za ryzyko z tytułu potencjalnej upadłości spółek. Dlatego też pomimo wątpliwych, jak

¹² E. Fama, K. French, *Common...*, op.cit., s. 7–8.

¹³ E. Fama, K. French, *Size and Book-to-Market Factors in Earnings and Returns*, „Journal of Finance” 1995, vol. 50, s. 131–155.

¹⁴ M. Vassalou, *The Fama-French factors as proxies for fundamental economic risks*, Working paper, Columbia University, New York 2000.

mogłoby się początkowo wydawać, możliwości predykcyjnych czynników w modelu Famy-Frencha, stoją za nim solidne podstawy makroekonomiczne oraz cechy fundamentalnych spółek, które uzasadniają użyteczność modelu.

2.2. Intertemporal CAPM

Fama i French podkreślają, że model trzyczynnikowy opiera się na stworzonej przez Roberta Mertona¹⁵ wersji modelu CAPM, nazwanej międzyokresowym CAPM (ang. *Intertemporal Capital Assets Pricing Model*). Rozszerza ona klasyczną postać CAPM o dodatkowe czynniki ryzyka, nazwane zmiennymi stanowymi (ang. *state variables*). Nie są one jednak określone przez autora. Merton przewidział, że zmienne te, bezpośrednio wpływające na stopy zwrotu, mogą być trudne do jednoznacznego określenia, dlatego założył możliwość konstruowania portfeli, których stopy zwrotu odzwierciedlają zwroty będące bezpośrednim skutkiem zmiennych stanowych (ang. *state variable mimicking portfolios*). Czynniki SMB i HML nie są jednak takimi portfelami odzwierciedlającymi zmienne stanowe, a jedynie portfelami, które przedstawiają różne kombinacje kowariancji ze zmiennymi stanowymi. Dzięki temu SMB i HML przedstawiają stopy zwrotów z różnych zmiennych stanowych bez konieczności ich określania.

3. Metodologia przeprowadzania badań

Liczba opracowań naukowych poświęconych wykorzystaniu trzyczynnikowego modelu Famy-Frencha na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie jest ograniczona. Jednym z nich jest praca A. Czapkiewicz i I. Skalnej¹⁶. W badaniu wykazano, że model sprawdza się w okresie hossy, ale jest nieużyteczny w trakcie trendu spadkowego. Wcześniejsze opracowanie tych autorek wskazuje na zadowalające opisywanie stóp zwrotu przez model trzyczynnikowy¹⁷. Zaremba wykazał

¹⁵ R. Merton, *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, „Econometrica” 1973, vol. 41, s. 867–887.

¹⁶ A. Czapkiewicz, I. Skalna, *Użyteczność stosowania modelu Famy i Frencha w okresach hossy i bessy na rynku akcji GPW w Warszawie*, „Bank i Kredyt” 2011, vol. 42, s. 61–80.

¹⁷ A. Czapkiewicz, I. Skalna, *The CAPM and Fama-French Models in Poland*, „Przegląd Statystyczny” 2010, vol. 57, s. 128–141.

dobrze objaśnianie stóp zwrotu przez model Famy-Frencha na GPW w Warszawie¹⁸. Istnieją także nieliczne opracowania, w których model trzyczynnikowy jest wykorzystywany jako narzędzie badawcze, np. do zbadania synchronizacji profesjonalnych portfeli inwestycyjnych z rynkiem¹⁹ czy jako narzędzie do analizy zdarzeń²⁰. Niniejsze opracowanie ma na celu zbadanie możliwości wykorzystania modelu na GPW, więc bliższe jest pierwszym trzem wymienionym pracom. Przy wykorzystaniu najnowszych danych i zmodyfikowanej metodologii otrzymane rezultaty stają się bardziej aktualne.

3.1. Okres badawczy

Badaniem objęto okres ponad jedenastu lat, od kwietnia 2004 r. do czerwca 2015 r., co daje łącznie 135 miesięcy – rysunek 1. W tym czasie na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie wyróżnić można hossę zakończoną w 2007 r., po której nastąpiła bessa trwająca do początku roku 2009.

Rysunek 1. WIG w okresie objętym badaniem



Źródło: opracowanie własne na podstawie: stooq.pl

¹⁸ A. Zaremba, *Cross-sectional asset pricing models for the Polish market*, 2014, <http://ssrn.com/abstract=2396884>.

¹⁹ J. Olbryś, *Three Factor Market Timing Models with Fama and French's Spread Variables*, „Operations Research and Decisions” 2010, vol. 20, s. 91–106.

²⁰ L. Czapiewski, *Model CAPM i trójczynnikowy model Famy-Frencha w analizie zdarzeń na polskim rynku kapitałowym*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego” 2015, nr 854, s. 609–620.

Trend wzrostowy, zapoczątkowany w lutym 2009 r., przerwany został spadkami w połowie 2011 r., po czym nastąpił ponowny trend wzrostowy, trwający do końca okresu badania. Badaniem nie zostały objęte poszczególne podokresy, ale cały zakres danych, dzięki temu model będzie dostosowany do zmienności obserwowanych trendów, a nie tylko do określonego podokresu, kiedy to dominował wyraźny trend wzrostowy lub spadkowy.

3.2. Zbiór danych

Do badania wybrano spółki, które wchodziły lub wchodziły w skład indeksu WIG, w interwale objętym badaniem. Takie podejście ma na celu wyeliminowanie spółek będących w obrocie na GPW, ze względu na metodologię konstrukcji indeksu WIG²¹, które jednak nigdy nie charakteryzowały się wystarczającą płynnością lub których wartość akcji znajdujących się w wolnym obrocie była niska w trakcie całego okresu badawczego. Dzięki temu w badaniu uwzględnione zostały jednak te spółki, których średnia wartość dziennych obrotów znajduje się na znaczącym poziomie, czego przykładem jest chociażby Grupa Żywiec SA. W badaniu wyeliminowano spółki dopuszczone do obrotu na GPW, dla których giełda macierzysta²² znajduje się w innym kraju, a GPW jest drugim parkietem. Dzięki temu wykluczony został wpływ ryzyka kursowego na odnotowane stopy zwrotu (większość spółek z tej grupy cechowała wysoka kapitalizacja, co wpłynęłoby negatywnie na konstrukcje portfeli inwestycyjnych). Wśród wyeliminowanych spółek wymienić można np. Unicredit SpA, Banco Santander SA czy CEZ AS. W badaniu zrezygnowano z wyłączenia spółek według kraju pochodzenia. Ograniczyłyby to udział wielu spółek ukraińskich czy z innych krajów Europy Środkowo-Wschodniej, które jednak notowane są wyłącznie na GPW. Także spółki zarejestrowane za granicą jedynie ze względów podatkowych nie zostałyby objęte badaniem. Przyjęta metodologia pozwoli na wyeliminowanie wpływu czynników zewnętrznych (spoza GPW) przy jednoczesnym niezbyt nadmiernym ograniczeniu liczby spółek.

W badaniu wzięły udział wszystkie spółki, spełniające powyższe warunki (łącznie 518 dla wszystkich miesięcy), bez względu na to, kiedy zaczęły być notowane, czy

²¹ Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie, *Opisy indeksów*, „GPW.pl”, 09.11.2015, http://static.gpw.pl/pub/files/PDF/indeksy/zmiana2/2015_03_31_WIG.pdf

²² Wg Bloomberg L.P.

zostały na przestrzeni lat objętych badaniem wykreślone z GPW lub czy ich notowania zostały tymczasowo zawieszane (jedynie w miesiącu objętym zawieszeniem spółka nie jest wzięta pod uwagę w badaniu). Dzięki temu wyeliminowany lub co najmniej znacząco ograniczony zostanie błąd selekcji (ang. *survivorship bias*). Uwzględnianie spółek, niezależnie od tego, kiedy wchodziły w skład indeksu WIG, pozwoli także na zmniejszenie tego błędu. Wykreślenie danej spółki z indeksu w danym okresie może np. oznaczać jedynie przejściowe problemy z płynnością ich akcji.

Stopy zwrotów z cen akcji spółek uwzględniają wpływ wypłaconych dywidend, podziałów akcji (splitów) czy ustalonych praw poboru i są skalkulowane w ujęciu miesięcznym. Jako stopę zwrotu wolną od ryzyka przyjęto jednomiesięczny WIBOR, co zapewnia spójność z przyjętym okresem periodyzacji stóp zwrotu akcji spółek. Rynkowa stopa zwrotu jest równa stopie zwrotu indeksu WIG. Wskaźnik BV/MV ustalony został na podstawie relacji ceny w danym miesiącu oraz wartości księgowej wg ostatniego, dostępnego w danym momencie sprawozdania finansowego. W przypadku zawieszenia notowań cen akcji spółek, niedostępności którejś z niezbędnych danych lub też gdy wartość księgową spółki była ujemna, były one pomijane są w badaniu (w danym miesiącu).

3.3. Konstrukcja portfeli inwestycyjnych

W każdym miesiącu badane spółki zostały podzielone ze względu na wartość kapitalizacji, a następnie podzielone na: małe (S – *Small*), średnie (M – *Medium*) i duże (B – *Big*). Jako małe zakwalifikowane zostały spółki mniejsze lub równe decylovi 0.3 pod względem kapitalizacji. Za duże uznano spółki powyżej decyla 0.7. Spółki średnie to pozostałe firmy znajdujące się między decylem 0.3 a 0.7. Podobny podział przeprowadzony został ze względu na wartość współczynnika BV/MV: o wysokiej wartości współczynnika (H – *High*), średniej (M – *Medium*) oraz niskiej (L – *Low*). Do spółek o wysokim współczynniku BV/MV zaliczone zostały te, które leżą powyżej decyla 0.7. Spółki o niskim współczynniku są położone na równi decyla 0.3 lub poniżej, zaś spółki o średniej wartości współczynnika BV/MV położone są między decylem 0.3 a 0.7. Przy obu kryteriach podziału najliczniejszą populację stanowiły spółki średnie. Zastosowany podział miał na celu wyraźne rozgraniczenie spółek o skrajnych wartościach analizowanych czynników, co w rezultacie powinno się przyczynić do dokładniejszego wyznaczenia elementów SMB i HML.

W dalszej kolejności spółki przydzielone zostały do dziewięciu rozłącznych portfeli inwestycyjnych. Kryterium przydziału stanowiły zarówno wielkość, jak i wartość współczynnika BV/MV. W ten sposób utworzony został portfel spółek małych o wysokim współczynniku (SH), małych o średnim (SM), dalej analogicznie SL, MH, MM, ML, BH, BM i BL, gdzie pierwsza litera oznacza rozmiar spółki, a druga jej wartość współczynnika BV/MV. Uzyskane portfele nie są równoliczne, nie tylko ze względu na nierówny podział, lecz także ze względu na przypisywanie portfeli pod względem dwóch kryteriów. W ten sposób spółek w portfelu SH jest w większości miesięcy więcej niż w SM i SL razem wziętych. Oznacza to, że spółki małe odznaczają się zazwyczaj wysoką wartością współczynnika BV/MV. Odwrotnie jest ze spółkami dużymi, których większość ma niski poziom BV/MV, jednak w tym przypadku przewaga nie okazała się tak znacząca. Portfele MH, MM i ML są w przybliżeniu równoliczne, choć największą liczebność spółek wykazuje portfel MM. W każdym miesiącu objętym badaniem wszystkie portfele inwestycyjne składały się z co najmniej z kilku spółek.

3.4. Konstrukcja czynników SMB i HML

Czynnik rynkowy ($r_M - r_f$) to, podobnie jak w modelu CAPM, różnica między zwrotem z rynku a stopą wolną od ryzyka; w badaniu jest to analogicznie miesięczna stopa zwrotu z indeksu WIG i stawka jednomiesięcznego WIBOR. Konstrukcja pozostałych dwóch czynników w modelu oparta została na podziale spółek na portfele. Czynniki SMB obliczony został jako różnica (dla każdego miesiąca) pomiędzy średnią stopą zwrotu z cen akcji spółek o małej kapitalizacji a średnią stopą zwrotu akcji spółek o dużej kapitalizacji. Przy kalkulacji stóp zwrotu zastosowane zostało ważenie liczbą spółek, które miało na celu wyeliminowanie zbyt dużego wpływu na wynik portfeli o małej liczbie spółek. Analogicznie liczony jest czynnik HML. Jest to różnica średniej ważonej stóp zwrotu z portfeli SH, MH i BH (zwrot spółek o wysokim współczynniku BV/MV) a średnią ważoną portfeli SL, ML i BL.

Zastosowana procedura różni się od opisanej w oryginalnym badaniu Fama i Frencha, gdzie stopy zwrotu dla spółek o różnej kapitalizacji oraz niskim współczynnikiem BV/MV, skalkulowano za pomocą zwykłej średniej arytmetycznej²³. Zadaniem przyjętej metodologii było odseparowanie zwrotów ze spółek o określonym

²³ E. Fama, K. French, *Common...*, op.cit., s. 9.

rozmiarze od wpływu czynnika związanego z poziomem relacji BV/MV. Ze względu na występujące różnice w liczebności spółek w różnych portfelach zdecydowano się na wykorzystanie średniej ważonej. Pomimo tego uzyskany w niniejszym badaniu współczynnik korelacji między czynnikami SMB a HML jest wystarczająco niski, by przyjąć założenie o nieistotnym wzajemnym wpływie czynników wyjaśniających stopy zwrotu związanych z rozmiarem oraz współczynnikiem BV/MV.

3.5. Szacowanie modelu

Na podstawie skonstruowanych portfeli oraz otrzymanych czynników ryzyka rynkowego, SMB i HML, sprawdzona została efektywność opisu stóp zwrotu poszczególnych portfeli przez model trzyczynnikowy. Szacowanie modelu dokonane zostało za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów (KMNK). W szczególności przeanalizowane zostały wartości prawdopodobieństwa testowego dla czynników modelu oraz współczynnik determinacji R^2 , wskazujący na dokładność dopasowania modelu. Obliczona została również statystyka testu F, pozwalająca stwierdzić, czy co najmniej jedna ze zmiennych trzyczynnikowego modelu okazała się statystycznie istotna. Występowanie autokorelacji składnika losowego w modelu sprawdzone zostało z wykorzystaniem statystyki Durбина-Watsona²⁴.

3.6. Test Gibbonsa, Rossa i Shankena

Ostatnią metodą weryfikacji modelu trzyczynnikowego był test M. Gibbonsa, S. Rossa i J. Shankena (GRS), który służy do przeprowadzania weryfikacji modeli wyceny aktywów, wyestymowanych jednocześnie dla różnych aktywów (lub portfeli)²⁵:

$$GRS = \left(\frac{T}{N} \right) \left(\frac{T-N-L}{T-L-1} \right) \hat{\alpha}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\alpha} \left[1 + E_T(f)' \hat{\Omega}^{-1} E_T(f) \right]^{-1} \sim F_{N, T-N-L} \quad (3)$$

²⁴ Rozdział: T. Kuszewski, *Jednorównaniowy liniowy model ekonometryczny – estymacja oraz Weryfikacja jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego – zakres podstawowy*, w: *Ekonometria*, red. M. Gruszczynski, M. Podgórska, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2004, s. 21–61.

²⁵ M. Gibbons, S. Ross, J. Shanken, *A Test of the Efficiency of a Given Portfolio*, „Econometrica” 1989, vol. 57, s. 1121–1152.

gdzie:

T – liczba obserwacji (liczba okresów objętych badaniem w szeregu czasowym);

N – liczba badanych aktywów (lub portfeli);

L – liczba czynników w modelu;

$\hat{\alpha}$ – wektor oszacowanych wyrazów wolnych (dla wszystkich portfeli);

$\hat{\Sigma}$ – macierz kowariancji reszt modelu dla wszystkich portfeli;

$E_1(f)$ – wektor wartości oczekiwanej wszystkich stóp zwrotu z czynników modelu;

$\hat{\Omega}$ – macierz kowariancji stóp zwrotu z czynników modelu.

Statystyka ma rozkład F o N i $T - N - L$ stopniach swobody.

Hipoteza zerowa tego testu zakłada zerową wartość wszystkich wyrazów wolnych w badanym modelu. Zerowa wartość wyrazów wolnych oznacza, że czynniki uwzględnione w modelu są wystarczające do określania stóp zwrotu, za pomocą tego właśnie modelu. Przeciwna sytuacja oznaczałaby, że na stopy zwrotu wpływają także inne, nieuwzględnione w modelu czynniki. Przewagą testu GRS nad innymi podobnymi testami jest to, że bada model jako całość, a nie analizuje sprawdzalność modelu na jednym tylko portfelu inwestycyjnym. Statystyka ta może więc być rozstrzygająca, jeśli chodzi o akceptację lub odrzucenie danego modelu.

4. Wyniki badania

Na podstawie zaprezentowanej metodologii przeanalizowano dane dotyczące stóp zwrotu w analizowanym okresie. Oszacowane zostały także parametry modelu trzyczynnikowego Famy-Frencha dla skonstruowanych portfeli. Wyniki przeprowadzonych analiz i oszacowań przedstawione są poniżej.

4.1. Stopy zwrotu wśród spółek różnych kategorii

W ramach badania nad adekwatnością modelu trzyczynnikowego Famy-Frencha postanowiono sprawdzić także średnie stopy zwrotu oraz poziomy ryzyka w poszczególnych portfelach. Zależności te przedstawiono w tabeli 1.

Podczas analizy wartości przedstawionych w tabeli 1 zaobserwować można wyższą wartość stóp zwrotu wśród spółek o dużej kapitalizacji w porównaniu ze spółkami o małej kapitalizacji. Jeśli chodzi o przewagę zwrotów tej pierwszej grupy spółek nad spółkami o średniej kapitalizacji, to nie jest ona tak jednoznaczna.

Wśród spółek o niskim i średnim współczynniku BV/MV, to spółki o średniej kapitalizacji oferują wyższe stopy zwrotu niż firmy o dużej kapitalizacji. Bardziej jednoznaczny jest spadek ryzyka, mierzonego odchyleniem standardowym wraz ze wzrostem rozmiaru spółki – jedynie wśród spółek o wysokim współczynniku BV/MV ryzyko kształtuje się inaczej. Malejąca wartość współczynnika BV/MV wpływa pozytywnie na stopy zwrotu. Ciekawym faktem jest najniższy poziom ryzyka wśród spółek o średnich (pod względem BV/MV), a najwyższy wśród tych wzrostowych (o niskim BV/MV).

Tabela 1. Średnie stopy zwrotu i ich odchylenia standardowe w danych grupach (w %)

		Średnia				Odchylenie standardowe			
		Rozmiar				Rozmiar			
		S	M	B		S	M	B	
BV/MV	H	-1,582	-0,821	0,260	-0,786	8,133	8,340	8,233	7,882
	M	0,106	1,284	1,055	0,936	7,583	6,926	6,462	6,639
	L	2,923	4,488	2,785	3,491	10,659	10,081	6,628	8,115
		-0,023	1,565	1,523		8,016	7,586	6,473	

Źródło: opracowanie własne.

Wykazane w tabeli 1 zależności różnią się znacząco nie tylko od oryginalnych badań Famy i Frencha²⁶, lecz także od innych badań dotyczących zarówno światowych rynków rozwiniętych²⁷, jak i polskiej Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie²⁸. Prace te wykazują pozytywną premię za inwestowanie w spółki małe oraz o wysokiej relacji BV/MV. Jedynie w badaniu dotyczącym rynków światowych w niektórych regionach stwierdzone zostały wyższe stopy zwrotu wśród spółek dużych w porównaniu z małymi.

Spśród zaprezentowanych danych na uwagę zasługuje fakt przewagi stóp zwrotu wśród spółek o średniej kapitalizacji, zarówno nad spółkami o małej, jak i dużej kapitalizacji (wśród spółek o wysokim BV/MV jedynie średniej wielkości spółki nie są najbardziej dochodowe). Oznacza to, że na polskim rynku możliwie

²⁶ E. Fama, K. French, *The Cross-Section...*, op.cit., s. 427–465; E. Fama, K. French, *Common...*, op.cit., s. 15.

²⁷ E. Fama, K. French, *Size, Value, and Momentum in International Stock Returns*, „Journal of Financial Economics” 2012, vol. 105, s. 462–463.

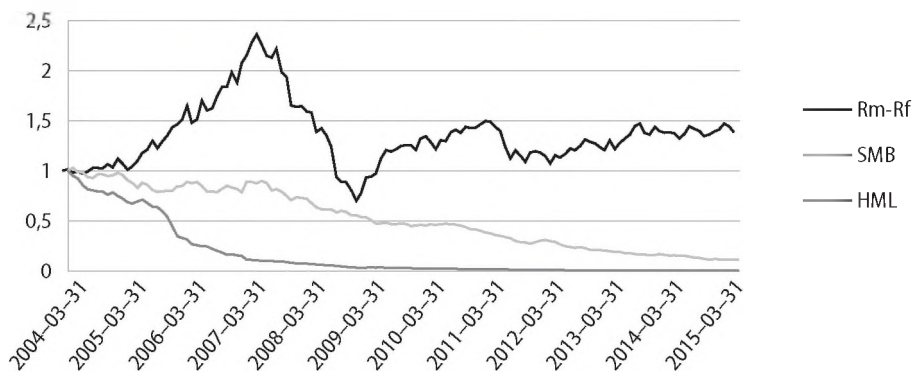
²⁸ A. Zaremba, *Cross-sectional...*, op.cit., s. 24–30; A. Czapkiewicz, I. Skalna, *The CAPM...*, op.cit., s. 133.

najlepszą strategią inwestycyjną mogą być średniej wielkości spółki, szczególnie o niskim współczynniku BV/MV.

4.2. Czynniki SMB i HML

Wnioski wynikające z tabeli 1 oznaczają, że czynniki SMB i HML, odpowiadające premii za inwestycje w spółki o małej kapitalizacji lub o niskim współczynniku BV/MV, będą miały najprawdopodobniej ujemne średnie wartości. W istocie średnia dla czynnika SMB wynosi $-1,55\%$, przy odchyleniu standardowym $3,57\%$, mediana natomiast równa jest $-1,74\%$. Dla czynnika HML jest to odpowiednio $-4,28\%$, $4,68\%$ oraz $-4,09\%$. Dla porównania czynnik rynkowy ($r_M - r_f$) ma średnią $0,42\%$, odchylenie $6,03\%$, zaś medianę równą $0,53\%$. Wartości czynnika rynkowego są w większości dodatnie (w 72. miesiącach spośród 135. badanych). Dla czynnika SMB zarysowuje się natomiast bardziej znacząca przewaga wartości ujemnych (93 ze 135). Czynnik HML jest dodatni jedynie w 17 miesiącach, co stanowi zaledwie $12,6\%$ analizowanych okresów. Dla lepszego zobrazowania kształtowania się czynników w kolejnych miesiącach przedstawiony został rysunek 2.

Rysunek 2. Skumulowany zwrot z danego czynnika



Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 2 przedstawiono wartość hipotetycznej inwestycji w dany czynnik. Przyjęto, że wartość początkowa wynosiła 1. Z analizy czynników wynika, że na GPW premia za ryzyko związane z niską kapitalizacją jest ujemne. Analogicznie premia zobrazowana czynnikiem HML jest negatywna.

Trzyczynnikowy model Famy-Frencha skonstruowany został na założeniu przewagi stóp zwrotu ze spółek małych nad dużymi oraz wyższych zwrotów ze spółek o wysokiej wartości współczynnika BV/MV w porównaniu z tymi o małej. W niniejszym badaniu otrzymano jednak przeciwne rezultaty. Nie powinno mieć to jednak wpływu na zdolność opisywania stóp zwrotu przez model. Nie jest bowiem ważny kierunek działania danej premii za ryzyko, lecz sam fakt jej występowania. Pewnym utrudnieniem w stosowaniu modelu mogłyby być bliskie zera wartości SMB lub HML w znaczącej liczbie miesięcy.

W tabeli 2 przedstawiono macierz korelacji pomiędzy czynnikami ryzyka w modelu trzyczynnikowym. Korelacje pomiędzy tymi czynnikami osiągają niskie wartości i w każdym przypadku ich wartości bezwzględne są mniejsze od wartości krytycznej dla poziomu istotności 5%, która dla 135. obserwacji (liczba miesięcy objętych badaniem) wynosi 0,169. Można więc stwierdzić, że zmienne te są niezależne od siebie.

Tabela 2. Macierz korelacji czynników ryzyka

	$r_M - r_f$	SMB	HML
$r_M - r_f$	1	0,0911	0,1422
SMB	0,0911	1	-0,1346
HML	0,1422	-0,1346	1

Źródło: opracowanie własne.

4.3. Szacowanie modelu przy wykorzystaniu KMNK

Posługując się klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, oszacowano parametry modelu trzyczynnikowego Famy-Frencha dla wszystkich dziewięciu skonstruowanych (na podstawie kapitalizacji oraz wartości BV/MV) portfeli. W tabeli 3 przedstawiono uzyskane wartości parametrów z podziałem na portfele oraz odpowiadające im wartości prawdopodobieństwa testowego dla uzyskanej statystyki t-Studenta. Przedstawione w tabeli 3 wartości prawdopodobieństwa testowego oznaczone zostały czarnym tłem, jeśli nie są istotne dla poziomu istotności równego 5%. Na szaro oznaczone zostały te, dla których poziom ten wynosi 1%.

Tabela 3. Parametry modelu trzyczynnikowego

		α			β_M			β_{SMB}			β_{HML}		
		Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar		
		S	M	B	S	M	B	S	M	B	S	M	B
BV/MV	H	0.00616	0.01026	0.01309	0.93041	1.04646	1.00257	1.08133	0.66196	0.43760	0.29836	0.37917	0.26937
	M	0.00443	0.01279	0.00433	0.93733	0.91819	0.97531	0.93670	0.42277	0.03782	-0.08368	0.01995	0.02055
	L	0.01964	0.01157	0.00497	0.95005	1.09197	0.91327	1.72415	0.84306	0.20966	-0.67039	-0.89225	-0.43730
		wartość p dla α			wartość p dla β_M			wartość p dla β_{SMB}			wartość p dla β_{HML}		
		Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar		
		S	M	B	S	M	B	S	M	B	S	M	B
BV/MV	H	0.1989	0.0556	0.0428	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.0048
	M	0.3156	0.0090	0.2171	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5723	0.1969	0.7782	0.6886
	L	0.0042	0.1231	0.2541	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0128	0.0000	0.0000	0.0000
		α			β_M			β_{SMB}			β_{HML}		
		Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar		
		S	M	B	S	M	B	S	M	B	S	M	B
RV/MV	H	0.00616	0.01026	0.01309	0.93041	1.04646	1.00257	1.08133	0.66196	0.43760	0.29836	0.37917	0.26937
	M	0.00443	0.01279	0.00433	0.93733	0.91819	0.97531	0.93670	0.42277	0.03782	-0.08368	0.01995	0.02055
	L	0.01964	0.01157	0.00497	0.95005	1.09197	0.91327	1.72415	0.84306	0.20966	-0.67039	-0.89225	-0.43730
		wartość p dla α			wartość p dla β_M			wartość p dla β_{SMB}			wartość p dla β_{HML}		
		Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar		
		S	M	B	S	M	B	S	M	B	S	M	B
BV/MV	H	0.1989	0.0556	0.0428	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0000	0.0000	0.0048
	M	0.3156	0.0090	0.2171	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5723	0.1969	0.7782	0.6886
	L	0.0042	0.1231	0.2541	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0128	0.0000	0.0000	0.0000

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane wartości parametru α , czyli wyrazu wolnego, są niewielkie. Największa wartość tego parametru otrzymana została dla portfela SL (spółka o małej kapitalizacji oraz małym współczynnikiem BV/MV) i wynosi ona 1,964%, czyli zgodnie z modelem teoretyczne stopy zwrotu w tym portfelu powiększane są o tę wartość. Jedynie w tym oraz w portfelu MM wartość stałej jest istotna dla poziomu 1%. W pozostałych portfelach parametr ten jest nieistotny dla tego poziomu. Czynniki rynkowy jest istotną zmienną w każdym z portfeli, a wrażliwość na nią jest zbliżona do 1 we wszystkich portfelach. Wrażliwość na czynnik SMB maleje wraz ze wzrostem rozmiaru spółek, co jest logiczne ze względu na jego konstrukcję, która przedstawia różnicę między zwrotami ze spółek małych i z dużych. Analogicznie wrażliwość na HML maleje dla portfeli o coraz niższej wartości BV/MV. Czynniki SMB jest istotny dla większości portfeli poza BM (przy istotności 5%) oraz BH (przy istotności 1%). Stwierdzony został brak istotności zmiennej HML dla portfeli SM,

MM oraz BM. Dane z tabeli 3 nie pozwalają na określenie sprawdzalności modelu na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Kolejne informacje przedstawione zostały w tabeli 4.

Tabela 4. Wartości R^2 oraz statystyk F i Durбина-Watsona (DW) dla portfeli

		skorygowany R^2			Statystyka F			Statystyka DW		
		Rozmiar			Rozmiar			Rozmiar		
		S	M	B	S	M	B	S	M	B
BV/MV	H	0,79261	0,75618	0,63658	171,710	139,525	79,238	1,73006	1,73122	1,67529
	M	0,79743	0,70882	0,82498	176,834	109,730	211,548	1,91399	1,68278	1,73654
	L	0,75896	0,67001	0,74217	141,643	91,691	129,575	1,92927	1,66080	1,91565

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z wartościami statystyki F przedstawionej w tabeli 4, dla wszystkich portfeli należy odrzucić hipotezę zerową o nieistotności wszystkich zmiennych, ze względu na wartości prawdopodobieństwa testowego, które zbliżone są do 0 dla wszystkich portfeli. Przemawia to za akceptacją modelu trzyczynnikowego.

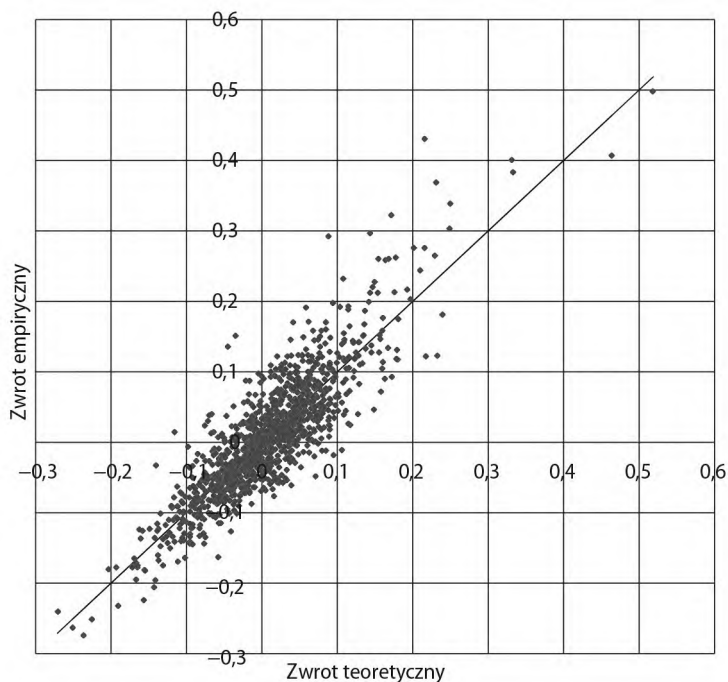
Wartości testu Durбина-Watsona dla trzech spośród analizowanych portfeli znajdują się powyżej wartości krytycznych, brak jest więc podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji składnika losowego. W pięciu portfelach statystyki DW mieszczą się pomiędzy wartościami krytycznymi, nie można więc podjąć decyzji odnośnie do hipotezy. Jedynie w portfelu ML stwierdzono występowanie autokorelacji. Brak występowania autokorelacji w większości portfeli świadczy na korzyść akceptacji modelu.

Analiza współczynników determinacji R^2 (skorygowanych) pozwala stwierdzić, że model jest zadowalająco dopasowany do empirycznych stóp zwrotu ze skonstruowanych portfeli. Wartości R^2 mieszczą się pomiędzy 0,63658 a 0,82498. Należy nadmienić, że wartości zwykłego współczynnika R^2 (nieskorygowanego) są jedynie nieznacznie wyższe niż skorygowanego (nie więcej niż o 0,01). Średnia wartość współczynnika determinacji dla wszystkich portfeli wynosi 0,743082, wartość ta najlepiej obrazuje generalne dopasowanie modelu bez względu na podział spółek na portfele. Model najslabiej dopasowany jest do portfeli, w których skład wchodzi spółki o średniej kapitalizacji. Jest to najprawdopodobniej związane z wnioskiem płynącym z tabeli 1 mówiącym, że spółki średniej wielkości cechują się większymi stopami zwrotów zarówno od spółek o dużej, jak i małej kapitalizacji. Występowanie tego zjawiska utrudnia dopasowanie modelu. Konieczna jest dalsza obserwacja

kształtowania się stóp zwrotu wśród spółek o różnej kapitalizacji, w przypadku dalszego utrzymywania się przewagi zwrotów ze spółek średniej wielkości, konieczne może okazać się zastąpienie czynnika SMB takim, który dokładniej obrazowałby lepsze wyniki portfeli średnich spółek.

Ostatnim przeprowadzonym dla modelu testem jest GRS. Jego wartość wyniosła 1,985, zaś wartość krytyczna (przy poziomie istotności 0,01) to 2,55478. Wskazuje to na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, wg której wartość wyrazu wolnego we wszystkich portfelach jest równa 0. Rezultat ten jest ważny ze względu na to, że dotyczy całego modelu, a nie poszczególnych portfeli; różne istotności poszczególnych zmiennych otrzymane dla różnych portfeli utrudniają decyzję na rzecz akceptacji czy odrzucenia modelu. Wynik testu GRS rozstrzyga tę kwestię na rzecz przyjęcia modelu trzyczynnikowego.

Rysunek 3. Wykres rozrzutu zwrotów empirycznych



Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane rezultaty badania, w tym istotność poszczególnych czynników oraz brak istotności wyrazów wolnych w większości portfeli, świadczą niemalże

jednoznacznie o możliwości wykorzystania modelu trzyczynnikowego Famy-Frencha na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W porównaniu z rezultatami poprzednich badań dotyczących modelu trzyczynnikowego na GPW uzyskane współczynniki determinacji R^2 są wyższe niż w opracowaniu Zaremby²⁹ czy Czapkiewicz i Skalnej³⁰. Trudno natomiast porównywać wartości współczynnika determinacji z innej pracy Czapkiewicz i Skalnej, gdzie odrębnie analizowano trzy podokresy (hossa, bessa i ponowna hossa), dla których uzyskano różne rezultaty³¹. Na rysunku 3 przedstawiony został rozrzut empirycznych stóp zwrotu.

5. Podsumowanie

Celem niniejszego artykułu było sprawdzenie możliwości wykorzystania trzyczynnikowego modelu Famy-Frencha na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Za pomocą przedstawionych rezultatów testów i statystyk, które świadczyły na korzyść modelu, wykazane zostało dobre jego dopasowanie do zwrotów empirycznych. Gorsze wyniki dopasowania (mierzone skorygowanym współczynnikiem determinacji R^2) uzyskano dla portfeli spółek o średniej kapitalizacji. Związane jest to z wyższymi stopami zwrotów spółek średnich w porównaniu ze spółkami o dużej i małej kapitalizacji. Niezbędna może okazać się dalsza analiza kształtowania się zwrotów spółek należących do różnych grup pod względem kapitalizacji. Koniecznością może okazać się zmiana konstrukcji czynnika SMB w ten sposób, żeby lepiej uwzględniał on kształtujące się różnice w stopach zwrotu. Oprócz poszukiwania tego czynnika kolejnym możliwym kierunkiem przeprowadzania dalszych badań jest sprawdzenie wykorzystania rozwinięć modelu trzyczynnikowego, takich jak model M. Carharta, wykorzystujący dodatkowy czynnik oparty na efekcie momentum³², czy pięcioczynnikowy model Famy-Frencha, który wprowadza czynniki oparte na dochodowości spółek oraz poziomie ich inwestycji³³. Może się również okazać, że na GPW duże znaczenie mają inne czynniki, mające większy wpływ

²⁹ A. Zaremba, *Cross-sectional...*, op. cit., s. 36.

³⁰ A. Czapkiewicz, I. Skalna, *The CAPM...*, op. cit., s. 138.

³¹ A. Czapkiewicz, I. Skalna, *Użyteczność...*, op. cit., s. 68–71.

³² M. Carhart, *On Persistence in Mutual Fund Performance*, „Journal of Finance” 1997, vol. 52, s. 57–82.

³³ E. Fama, K. French, *A five-factor asset pricing model*, „Journal of Financial Economics” 2015, vol. 116, s. 1–22.

na kształtowanie się stóp zwrotu. W takim przypadku koniecznym byłoby, zgodnie z modelem ICAPM, poszukiwanie czynników leżących u podstaw różnic w stopach zwrotu spółek o różnych poziomach kapitalizacji czy o różnych poziomach BV/MV.

Na polskim rynku finansowym, w przeciwieństwie do bardziej rozwiniętych, model Famy-Frencha nie jest szeroko wykorzystywany. Wykazane w niniejszym artykule jego dopasowanie do zwrotów na GPW może przyczynić się do zmiany podejścia zarówno inwestorów indywidualnych, jak i instytucjonalnych, z uwagi na fakt, że możliwe są liczne sposoby wykorzystania tego modelu w praktyce. Model trzyczynnikowy może zostać zastosowany jako narzędzie do oceny profesjonalnych inwestorów, poprzez obliczanie różnicy między zwrotem danego portfela a zwrotem oczekiwanym, tj. obliczonym wg modelu. Model trzyczynnikowy może służyć także zgodnie z przeznaczeniem do wyceny aktywów kapitałowych. Kolejnym jego zastosowaniem może być kalkulacja kosztu kapitału własnego. Zastosowania te skierowane są raczej do profesjonalnych niż indywidualnych inwestorów, ze względu na czasochłonność budowy modelu. Większą dostępność dla indywidualnych inwestorów mógłby sprawić fakt publikacji aktualnych czynników SMB i HML dla GPW w serwisach internetowych czy przez biura maklerskie. Ciekawym zastosowaniem, może nie samego modelu, ale zawartych w nim czynników, mogłoby być stworzenie instrumentów finansowych powiązanych z czynnikami SMB i HML.

Bibliografia

1. Ball R., *Anomalies in Relationships between Securities' Yields and Yield-Surrogates*, „Journal of Financial Economics” 1978, vol. 6.
2. Banz R., *The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks*, „Journal of Financial Economics” 1981, vol. 9.
3. Basu S., *The Relationship between Earnings' Yield, Market Value and Return for NYSE Common Stocks: Further Evidence*, „Journal of Financial Economics” 1983, vol. 12.
4. Bhandari L., *Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence*, „Journal of Finance” 1988, vol. 43.
5. Carhart M., *On Persistence in Mutual Fund Performance*, „Journal of Finance” 1997, vol. 52.
6. Czapiewski L., *Model CAPM i trójczynnikowy model Famy-Frencha w analizie zdarzeń na polskim rynku kapitałowym*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego” 2015, nr 854.

7. Czapkiewicz A., Skalna I., *The CAPM and Fama-French Models in Poland*, „Przeгляд Statystyczny” 2010, vol. 57.
8. Czapkiewicz A., Skalna I., *Użyteczność stosowania modelu Famy i Frencha w okresach hossy i bessy na rynku akcji GPW w Warszawie*, „Bank i Kredyt” 2011, vol. 42.
9. Dębski W., *Rynek finansowy i jego mechanizmy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
10. Fama E., *Two Pillars of Asset Pricing*, „The American Economic Review” 2014, vol. 104.
11. Fama E., French K., *The Cross-Section of Expected Stock Returns*, „Journal of Finance” 1992, vol. 47.
12. Fama E., French K., *Common Risk Factors in the Returns on Stock and Bonds*, „Journal of Financial Economics” 1993, vol. 33.
13. Fama E., French K., *Size and Book-to-Market Factors in Earnings and Returns*, „Journal of Finance” 1995, vol. 50.
14. Fama E., French K., *Size, Value, and Momentum in International Stock Returns*, „Journal of Financial Economics” 2012, vol. 105.
15. Fama E., French K., *A five-factor asset pricing model*, „Journal of Financial Economics” 2015, vol. 116.
16. Gibbons M., Ross S., Shanken J., *A Test of the Efficiency of a Given Portfolio*, „Econometrica” 1989, vol. 57.
17. Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie, *Opisy indeksów*, „GPW.pl”, 09.11.2015, http://static.gpw.pl/pub/files/PDF/indeksy/zmiana2/2015_03_31_WIG.pdf
18. Kuszewski T., *Jednorównaniowy liniowy model ekonometryczny – estymacja oraz weryfikacja jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego – zakres podstawowy*, w: *Ekonometria*, red. M. Gruszczynski, M. Podgórska, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2004.
19. Merton R., *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, „Econometrica” 1973, vol. 41.
20. Olbryś J., *Three Factor Market Timing Models with Fama and French’s Spread Variables*, „Operations Research and Decisions” 2010, vol. 20.
21. Rosenberg B., Reid K., Lanstein R., *Persuasive Evidence of Market Inefficiency*, „Journal of Portfolio Management” 1985, vol. 11.
22. Sharpe W., *Capital Assets Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, „Journal of Finance” 1964, vol. 19.
23. Vassalou M., *The Fama-French factors as proxies for fundamental economic risks*, Working paper, Columbia University, New York 2000.
24. Zaremba A., *Cross-sectional asset pricing models for the Polish market*, <http://ssrn.com/abstract=2396884>, 2014.

The Use of the Fama – French Three-Factor Model at the Warsaw Stock Exchange

Summary

The paper introduces the Fama-French three-factor model and explores the possibilities to apply it at the Warsaw Stock Exchange. Presented results of the study conducted for the period April 2004 – June 2015 confirm that the model estimated using the ordinary least squares method fits well stock returns on capitalization-based portfolios and the BV/MV ratio. The model performs less successfully with regard to the description of returns on medium capitalization portfolios due to their higher rates of return compared with small and large companies.

Keywords: three-factor model, the Fama – French model, SMB (Small Minus Big), HML (High Minus Low)
