dr Dariusz Stańko
Katedra Ubezpieczenia Społecznego
Szkoła Główna Handlowa
dariusz.stanko@gmail.com

1 listopada 2006 r., aktualizacja i poprawki: 30 stycznia 2008 r.

Ubezpieczenie w teorii użyteczności i w teorii wyceny aktywów

1. Ubezpieczenie – definicja

Ubezpieczenie można zdefiniować jako usługę, bądź system oferujący tę usługę, polegającą na transferze (*risk transfer*) i manipulacji ryzykiem (*risk combination*), czyli tworzeniu wspólnoty ryzyka (por. Bennett, 1992, s. 179). Ubezpieczenie może być zatem rozważane zarówno jako swego rodzaju dobro, jaki i usługa, której nabycie zapewnia uzyskanie ochrony ubezpieczeniowej.

W niniejszym rozdziale ubezpieczenie przedstawione jest z dwóch punktów widzenia – jako usługa (pomocna jest tutaj teoria użyteczności) oraz jako aktyw finansowy (opisywany przez teorię finansów). Oba podejścia wyjaśniają zachowania konsumenta i dają odpowiedź na pytanie, jaka powinna być cena ubezpieczenia.

2. Ubezpieczenie w teorii użyteczności

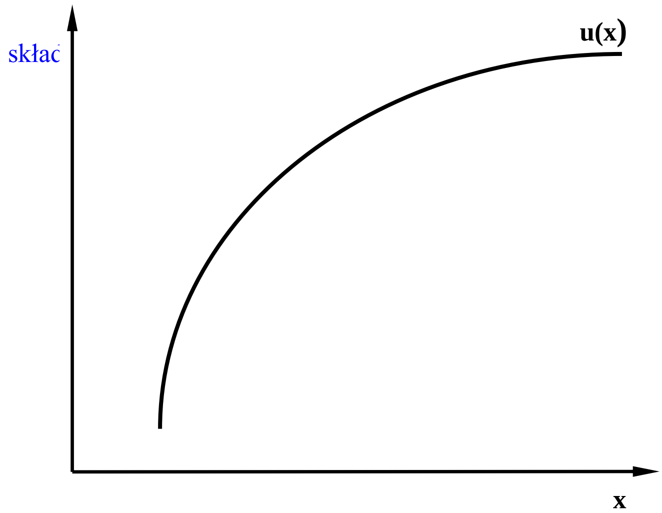
Teoria użyteczności jest pomocna w określeniu warunków występowania popytu ze strony konsumenta na produkty ubezpieczeniowe oraz w ustaleniu wielkości składki, jaką skłonny jest on zapłacić.

Teoretycznie, funkcja użyteczności konsumenta może posiadać dowolną formę; jedynymi koniecznymi warunkami jest to, by była to ciągła funkcja rosnąca (por. Luenberger, 1998, s. 229; pierwsza pochodna musi być dodatnia), oraz z reguły funkcja wklęsła (druga pochodna musi być ujemna). Warunek ciągłości jest konieczny dla istnienia pochodnej, warunek funkcji rosnącej odzwierciedla założenie, iż (zazwyczaj) większa konsumpcja wiąże się z większą użytecznością. Ostatnie założenie pojawia się w sytuacji, gdy konsument wykazuje awersję do ryzyka; warunek ten wiąże się ponadto z malejącą krańcową użytecznością konsumpcji.

Awersję do ryzyka można interpretować w związku z kształtem (wklęsłością) krzywej użyteczności – strata o wartości $-\Delta x$ (określona jako przesunięcie na lewo o wartość Δx od początkowej wartości majątku x) jest bardziej dotkliwie odczuwana przez konsumenta niż ewentualny zysk o tej samej wartości (przesunięcie na prawo o wartość Δx od początkowej wartości majątku x). Spadek użyteczności $\Delta U_1=U(x)-U(x-\Delta x)$ spowodowany stratą o wielkości Δx jest bowiem wyższy niż wzrost użyteczności $\Delta U_2=U(x+\Delta x)-U(x)$ wywołany zwiększeniem majątku o identyczną wartość Δx.

Dobrobyt konsumenta jest zatem reprezentowany przez funkcję użyteczności U(x), gdzie x – określa poziom majątku (*wealth)* konsumenta; funkcja jest ciągła i ma dodatnią pierwszą pochodną i niedodatnią drugą pochodną $[U'(x) > 0, U''(x) \leq 0]$.

Rys 1.: Typowy kształt funkcji użyteczności konsumenta wykazującego awersję do ryzyka



Konsument ma do wyboru: albo ubezpieczyć się, płacąc składkę s, albo wystawić się na ryzyko możliwej przyszłej redukcji majątku o stratę w nieznanej w chwili podejmowania decyzji wysokości $\Delta\tilde{x}$ (jest to zatem zmienna losowa). Sytuację tzw. indyferentności, w której konsumentowi jest wszystko jedno, czy ubezpieczać się czy też nie (czyli maksymalną wartość składki) określa następujące równanie (por. Gollier, 2001, ss. 20-21):

$$U(x-s)=E[U(x-\Delta\tilde{x})]$$

Ponieważ z reguły konsumenci wykazują awersję do ryzyka, można skorzystać z twierdzenia Jensena obowiązującego dla każdej zmiennej losowej $\tilde{z}$, które mówi, iż w przypadku funkcji wklęsłej (*concave*) wartość oczekiwana funkcji (czyli oczekiwana użyteczność z majątku) jest niższa od funkcji wartości oczekiwanej (czyli użyteczności z oczekiwanej wartości majątku):

$$E[U(\Delta\tilde{z})] \leq U(E[\tilde{z}])$$

Mamy zatem do czynienia z sytuacją, iż:

$$U(x-s) = \underbrace{E[U(x-\Delta\tilde{x})] \leq U[E(x-\Delta\tilde{x})]}_{\text{z nierówności Jensena}} = U[E(x)-E(\Delta\tilde{x})] = U[x-E(\Delta\tilde{x})]$$

czyli:

$$U(x-s) \leq U[x-E(\Delta\tilde{x})]$$

a ponieważ funkcja użyteczności jest funkcją rosnącą (U'(x)>0):

$$x-s \leq x-E(\Delta\tilde{x})$$

dlatego też:

$$s \geq E(\Delta\tilde{x})$$

Konsument wykazujący awersję do ryzyka jest zatem skłonny zapłacić składkę, której wartość przekracza oczekiwaną wartość straty. Chętnie zamienia on niepewną wartość przyszłego majątku (bez ubezpieczenia) na jego pewną wartość oczekiwaną (w przypadku ubezpieczenia, Gollier, 2001, s. 18).

Ile wynosi taka składka? Wiadomo, iż ludzie z awersją do ryzyka posiadają funkcje użyteczności Neumann-Morgensterna (por. McAfee, 2005, s. 187). Ich użyteczność jest sumą użyteczności uzyskiwanych w każdym możliwym stanie ważonych przez prawdopodobieństwa zajścia tych stanów:

$$U = p_1 \cdot u(x_1) + p_2 \cdot u(x_2) + \ldots + p_n \cdot u(x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(x_i)$$

Zakładając *ex ante,* iż prawdopodobieństwo wystąpienia straty równej x_2–x_1 (majątek o wartości x_2 ulega redukcji do x_1) wynosi p, a prawdopodobieństwo nie zajścia tej straty (1-p), *ex post* konsument będzie posiadał majątek o wartości albo x_1 (zaszła strata), albo x_2 (strata nie wystąpiła). Wartość oczekiwana majątku (zob. rys. 2) wyniesie $E = p \cdot x_1 + (1-p) \cdot x_2$, zaś użyteczność z takiego statystycznie oczekiwanego majątku to: $u[p \cdot x_1 + (1-p) \cdot x_2]$. Użyteczność z obu możliwych zdarzeń losowych (wystąpienie straty – majątek o wartości x_1, nie wystąpienie straty – majątek o wartości x_2) jest średnią ważoną prawdopodobieństwami zajścia obu zdarzeń (użyteczność Neumann-Morgensterna) wynoszącą $p \cdot u(x_1) + (1-p) \cdot (x_2)$.

Awersja do ryzyka przekłada się na wypukły kształt funkcji użyteczności, co powoduje, iż spełniona jest nierówność Jensena:

$$u[p \cdot x_1 + (1-p) \cdot x_2] \geq p \cdot u(x_1) + (1-p) \cdot (x_2)$$

Oznacza to, iż konsument preferuje uzyskanie średniego wyniku niż wyniku losowego (zob. rys. 2). Ekwiwalent pewności (CE, *certainty equivalent*) jest sumą pieniężną, która dostarcza identycznej użyteczności co wypłata losowa z „zakładu” (McAfee, 2005, s. 187), polegającego w tym wypadku na rezygnacji z ubezpieczenia w nadziei na nie wystąpienie straty i zaoszczędzenie składki ubezpieczeniowej. W przypadku występowania awersji do ryzyka, ekwiwalent pewności jest niższy od średniego (oczekiwanego) wyniku (McAfee, 2005, s. 187) – ludzie wolą zrezygnować z pewnej części możliwego „zysku” zadowalając się nieco niższym, ale za to pewnym, wynikiem. Premia za ryzyko, czyli koszt ryzyka, definiowany jako suma pieniędzy, jaką konsument jest skłonny zapłacić w celu eliminacji ryzyka jest wartością ubezpieczenia i wynosi (McAfee, 2005, s. 188):

$$\text{cena ubezpieczenia} = E - CE$$

Wartości składki za ubezpieczenie oraz majątku po ubezpieczeniu przedstawione są na rys. 2.

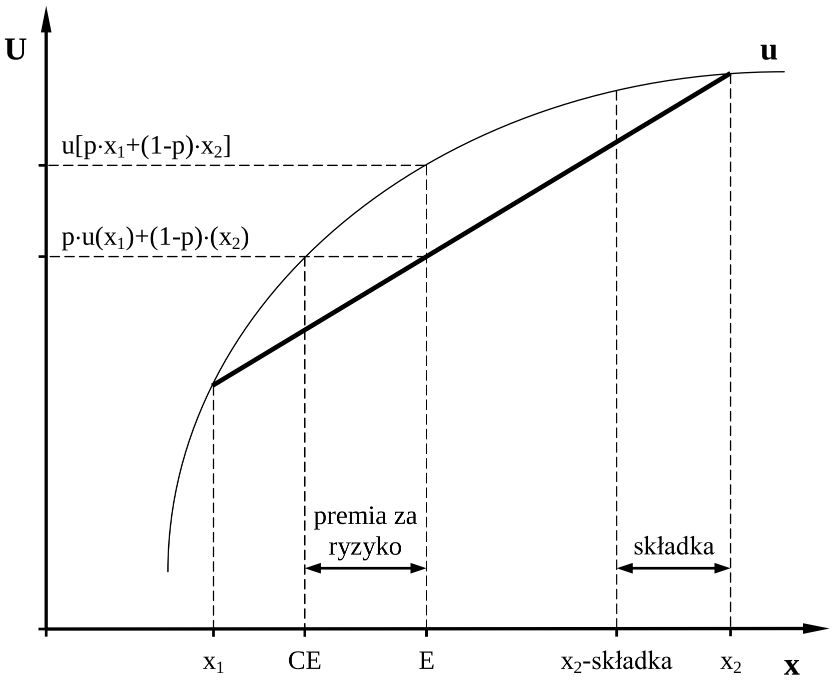
Wartość ubezpieczenia można także przedstawić (zob. McAfee, 2005, s. 188) jako:

$$E - CE \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{u''(E)}{u'(E)} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot \Psi(E) \cdot \sigma^2$$

gdzie: $\Psi(E)$: współczynnik Arrowa-Pratta (relacja wartości drugiej pochodnej funkcji użyteczności z wartości oczekiwanej majątku do wartości pierwszej pochodnej funkcji użyteczności z wartości oczekiwanej majątku),

σ^2 : wariancja możliwych wyników.

Rys 2.: Cena ubezpieczenia, ekwiwalent pewności oraz wartość majątku w przypadku nie zawarcia ubezpieczenia (x_1 – wystąpienie straty, x_2 – nie wystąpienie straty) i w przypadku zakupu ubezpieczenia (x_2–składka).



x_2	:	*wartość majątku gdy nie wystąpi strata (brak ubezpieczenia)*
x_1	:	*wartość majątku gdy wystąpi strata (brak ubezpieczenia)*
x_2-składka	:	*wartość majątku po zawarciu ubezpieczenia*
CE	:	*ekwiwalent pewności*
E	:	*wartość oczekiwana majątku przy braku ubezpieczenia* $E = p \cdot x_1 + (1-p) \cdot x_2$
E-CE	:	*cena ubezpieczenia (premia za ryzyko)*

Źródło: Opracowanie własne na podstawie McAfee (2005, s. 187).

3. Niedoubezpieczenie w świetle teorii użyteczności

W przypadku wystąpienia niedoubezpieczenia możemy rozważać dwa główne scenariusze. Pierwszy związany jest z wystąpieniem niedoubezpieczenia na skutek redukcji dotychczasowej ochrony ubezpieczeniowej. Przykładem może być tutaj obniżenie standardu ochrony oferowanego przez zabezpieczenie społeczne, np. system ochrony zdrowia lub system zabezpieczenia dochodów na starość. Druga możliwość, to wystąpienie niedoubezpieczenia na skutek powiększenia majątku przez co dotychczasowy poziom ochrony ubezpieczeniowej staje się niewystarczający.

W pierwszym przypadku, obniżenie poziomu ochrony – przy niezmienionej wartości majątku i prawdopodobieństwach zajścia straty – można przedstawić jako obniżenie wartości majątku x_1 w sytuacji wystąpienia straty o jakąś dodatkową wartość Δx przy braku ubezpieczenia. Nowa wartość wyniesie zatem x_1^*. Wartość x_2 nie ulega obniżeniu, określa ona bowiem wartość majątku w przypadku braku ubezpieczenia i nie wystąpienia straty. Linia łącząca oba punkty (x_1^* i x_2) na krzywej użyteczności ulega obniżeniu (linia zaznaczona za pomocą kropek, zob. rys. 3). Wartość oczekiwana majątku E^* ulegnie zmniejszeniu o dodatkową ekspozycję na ryzyko (Δx) ważoną prawdopodobieństwem jej wystąpienia (p):

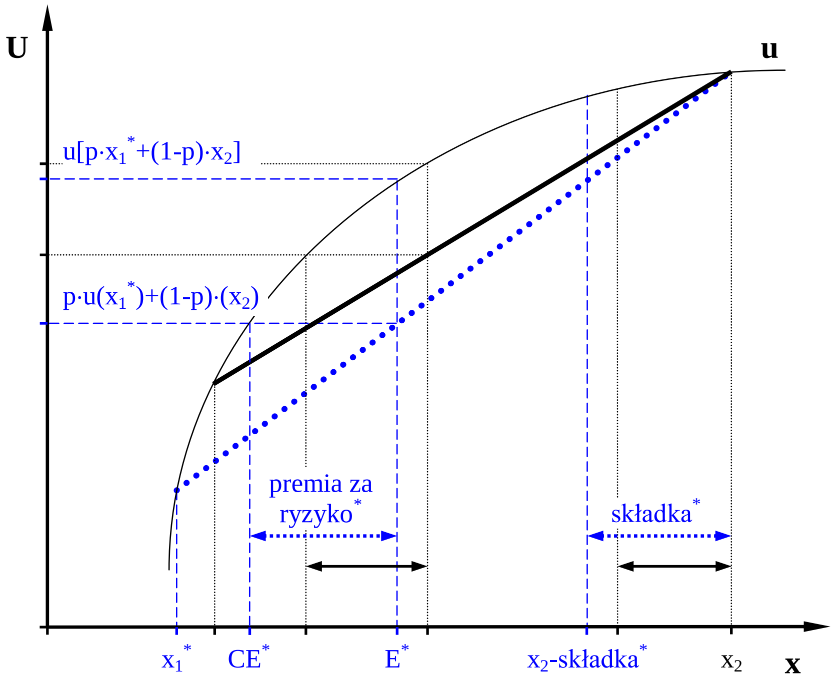
$$E^* = p \cdot x_1^* + (1-p) \cdot x_2 = p \cdot (x_1 - \Delta x) + (1-p) \cdot x_2 = p \cdot (x_1) + (1-p) \cdot x_2 - p \cdot \Delta x = E - p \cdot \Delta x$$

Obniżona wartość E^* powoduje redukcję ekwiwalentu pewności do CE^*. Wielkość tej zmiany zależy od poziomu awersji do ryzyka, czyli stopnia zakrzywienia funkcji użyteczności. Im wyższy poziom awersji, tym większy spadek wartości CE. Użyteczność z losowych wyników spada bardziej, niż użyteczność ze średniej. Redukcja wartości CE jest – w przypadku występowania awersji do ryzyka – większa (o jakąś wartość $c > 0$) niż redukcja wartości E, wynosząca $p \cdot \Delta x$ .W efekcie, zwiększa się premia za ryzyko (zakres opisany na rysunku strzałką zaznaczoną za pomocą kropek), a zatem także wysokość składki, jaką gotowy jest zapłacić ubezpieczony:

$$E^* - CE^* = [E - p \cdot \Delta x] - [CE - (p \cdot \Delta x + c)] = E - CE + c > \text{pierwotna skladka}$$

Różnica c w obu poziomach składek może być interpretowana jako koszt związany z wykupieniem dodatkowego ubezpieczenia w celu likwidacji niedoubezpieczenia.

Rys 3.: Wystąpienie niedoubezpieczenia na skutek obniżenia poziomu ochrony ubezpieczeniowej.



Zał.: Obecność efektu niedoubezpieczenia:

x_2 : *wartość majątku gdy nie wystąpi strata (brak ubezpieczenia)*
x_1^* : *wartość majątku gdy wystąpi strata (brak ubezpieczenia)*
x_2-składka* : *wartość majątku po zawarciu ubezpieczenia*
CE^* : *ekwiwalent pewności*
E^* : *wartość oczekiwana majątku przy braku ubezpieczenia*
$E = p \cdot x_1^* + (1-p) \cdot x_2$
E^*-CE^* : *cena ubezpieczenia (premia za ryzyko)*

Źródło: Opracowanie własne.

W drugim przypadku niedoubezpieczenia mamy do czynienia z sytuacją nieadekwatności dotychczasowego poziomu ochrony ubezpieczeniowej w stosunku do zwiększonego majątku. Można rozważyć dwa warianty tej sytuacji.

<u>wariant pierwszy</u>

Jeśli dodatkowy majątek nie jest narażony na wystąpienie straty, to mamy do czynienia z równoległym przesunięciem punktów x_1 i x_2 o jakąś wartość Δx do punktów x_1^* i x_2^*. Nowa wartość oczekiwana majątku E^* ulega zatem zwiększeniu o tę wartość Δx:

$$E^* = p \cdot \left(x_1^*\right) + (1-p) \cdot x_2^* = p \cdot (x_1 + \Delta x) + (1-p) \cdot (x_2 + \Delta x) =$$

$$= p \cdot x_1 + (1-p) \cdot x_2 + p \cdot \Delta x + \Delta x - p \cdot \Delta x = E + \Delta x$$

Nowa wartość ekwiwalentu pewności CE^* zależeć będzie od kształtu krzywej funkcji użyteczności w obrębie punktów x_1^* i x_2^*, a zatem – od lokalnej charakterystyki awersji do ryzyka. Jeżeli współczynnik Ψ absolutnej awersji do ryzyka Pratta-Arrowa zmniejsza się, to zwiększenie wartości majątku owocować będzie zmniejszeniem wartości premii za ryzyko (zob. McAfee i Vincent, 1993, ss. 191÷212). Tym samym, ubezpieczony jeśli zdecyduje się na dodatkową ochronę ubezpieczeniową, to dokupi wprawdzie jakąś absolutną wartość ochrony ubezpieczeniowej, jednakże relatywny poziom tej ochrony będzie niższy.

<u>wariant drugi</u>

W przypadku, gdy zwiększony majątek jest narażony na ryzyko zredukowania do pierwotnej wartości x_1 opisującej majątek w przypadku wystąpienia szkody (czyli np. wartość spalonego mieszkania jest praktycznie jednakowa w przypadku mieszkania o powierzchni 100 m^2 czy 130 m^2), mamy do czynienia z sytuacją przesunięcia jedynie punktu x_2 o wartość Δx. Nowa wartość oczekiwana majątku E^* wynosi:

$$E^* = p \cdot x_1 + (1-p) \cdot x_2^* = p \cdot x_1 + (1-p) \cdot (x_2 + \Delta x) =$$
$$= p \cdot x_1 + (1-p) \cdot x_2 + \Delta x - p \cdot \Delta x = E + (1-p) \cdot \Delta x$$

Jak widać, zwiększenie wartości oczekiwanej jest w tym wypadku nieco niższe (o czynnik (1-p)) niż w wariancie pierwszym, czyli efekt zwiększonego majątku będzie zapewne niższy.

Występowanie niedoubezpieczenia, szczególnie w kontekście obniżania ochrony ubezpieczeniowej oferowanej przez system zabezpieczenia społecznego, powinno z reguły wywoływać dodatkowy popyt na ubezpieczenie. Wzrost tego popytu może być relatywnie niższy od dynamiki powstania niedoubezpieczenia, jeżeli nieadekwatność ochrony jest spowodowana przez zwiększenie wartości majątku. W ekstremalnych przypadkach (znaczący wzrost majątku) ubezpieczony może obniżyć poziom ubezpieczenia, ponieważ przy zwiększonym majątku jest on zdolny do większego pochłaniania ewentualnych strat.

Nie należy zapominać, iż nawet w „klasycznej" sytuacji niedoubezpieczenia, jaka występuje obecnie na skutek obniżania standardów ochrony oferowanych przez państwo, decyzja o doubezpieczeniu zależeć będzie od dwóch ważnych czynników społeczno-ekonomicznych. Pierwszym jest poziom świadomości ubezpieczeniowej – ludzie będą decydować się na dodatkową ochronę ubezpieczeniową jedynie wtedy, gdy będą wiedzieć, że ich ochrona ubezpieczeniowa uległa pogorszeniu. Drugi czynnik związany jest z wysokością dochodów rozporządzalnych. W przypadku, gdy ubezpieczonego nie stać jest na dodatkową składkę ubezpieczeniową, będziemy mieli do czynienia z relatywnym wzrostem użyteczności z konsumpcji bieżącej (efekt substytucyjny) względem użyteczności z „konsumpcji" ubezpieczenia. Brak środków na dodatkowe ubezpieczenie wymusi przyjęcie postawy hazardowej, polegającej na zatrzymaniu ryzyka.

4. Ubezpieczenie w teorii finansów

Popyt konsumenta na ubezpieczenie może być rozpatrywany także z punktu widzenia teorii finansów. Niniejszy punkt referuje takie podejście, stworzone przez Cochrane (2001, ss. 6÷16) w jego książce pt. *Wycena aktywów* (*Asset pricing*). Zamieszczone w tej sekcji równania pochodzą bezpośrednio z Cochrane (2001) lub są odpowiednimi wyprowadzeniami objaśniającymi przekształcenia zawarte w źródle.

Ciąg rozważań jest następujący. By obliczyć, jaka jest wartość aktywu (w naszym wypadku kontraktu ubezpieczeniowego) w czasie t, musimy określić nieznaną, przyszłą wypłatę (*payoff*) x_{t+1} w czasie t+1. Wypłata ta determinuje przyszły wynik inwestycji polegającej na zakupie aktywu. Wartość tę oblicza się dla typowego inwestora (tzw. agent reprezentatywny, *representative agent*); w tym celu potrzebne jest nam zdefiniowanie jego funkcji użyteczności (*utility function*). Użyteczność z konsumpcji w czasie t oraz z konsumpcji w czasie t+1 jest sumą znanej nam użyteczności z konsumpcji bieżącej $u(c_t)$ oraz nieznanej użyteczności z konsumpcji w przyszłości. Dlatego też musimy brać pod uwagę **oczekiwaną** wartość konsumpcji, czyli musimy wprowadzić operator wartości oczekiwanej. Dodatkowo, ponieważ typowy konsument preferuje konsumpcję dzisiejszą od konsumpcji przyszłej, należy tę ostatnią zredukować dodatkowym współczynnikiem, opisującym **niecierpliwość** konsumenta. Wartość oczekiwaną z przyszłej konsumpcji mnoży się zatem przez współczynnik β zwany subiektywnym czynnikiem dyskontującym (*subjective discount factor*). Ostatecznie równanie użyteczności z konsumpcji teraźniejszej i przyszłej przedstawić można jako:

$$U(c_t, c_{t-1}) = u(c_t) + \beta \cdot E_t \cdot [u(c_{t+1})]$$

W finansach dość często stosuje się potęgową formę funkcji użyteczności. Jedną z grup takich funkcji są funkcje użyteczności charakteryzujące się stałą relatywną awersją do ryzyka (Pratt, 1964; Gollier, 2001, s. 21), tzw. CRRA (*constant relative risk aversion*) o postaci:

$$u(c_t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot c_t^{1-\gamma}$$

gdzie: γ : współczynnik Arrowa-Pratta stałej, relatywnej awersji do ryzyka (Makdissi i Wodon, 2003, s. 3)

W przypadku $\gamma = 1$ (bądź $\gamma \to 1$), wartość funkcji wynosi ln(c). Im większa wartość parametru γ, tym bardziej funkcja użyteczności jest zakrzywiona. Jak zauważa Cochrane (2001, s. 7), przyszła konsumpcja c_{t+1} jest wartością losową i większa krzywizna (*curvature*) funkcji jest efektem wyższej awersji konsumenta do ryzyka i do substytucji czasowej (*temporal substitution*). Konsumenci preferują bowiem poziom konsumpcji, który jest stały, zarówno w czasie, jak i względem możliwych scenariuszy.

Po to, by określić, ile konsument skłonny jest zakupić aktywu finansowego po cenie p_t, a zatem – innymi słowy – ile przeznaczy na konsumpcję, a ile na inwestycje, należy rozwiązać problem będący równaniem optymalizacyjnym:

$$\max_{|\varepsilon|} \; u(c_t) + E_t[\beta \cdot u(c_{t+1})]$$

przy warunkach ograniczających:

$$c_t = e_t - p_t \cdot \xi$$

oraz

$$c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1} \cdot \xi$$

gdzie: e : pierwotny poziom konsumpcji (brak inwestycji),

ζ : ilość zakupionego aktywu.

Rozwiązując ten problem poprzez przyrównanie pierwszej pochodnej funkcji celu względem ilości aktywu (ζ) do zera i wstawienie do niej warunków ograniczających, otrzymujemy:

$$\frac{\partial[u(c_t) + E_t[\beta \cdot u(c_{t+1})]]}{\partial \xi} = \frac{\partial[u(e_t - p_t \cdot \xi) + E_t[\beta \cdot u(e_{t+1} + x_{t+1} + \xi)]]}{\partial \xi} =$$

$$= -p_t \cdot u'(e_t - p_t \cdot \xi) + E_t[\beta \cdot x_{t+1} \cdot u'(e_{t+1} + x_{t+1} \cdot \xi)] =$$

$$= -p_t \cdot u'(c_t) + E_t[\beta \cdot u'(e_{t+1} \cdot x_{t+1})] = 0$$

zatem:

$$p_t \cdot u'(c_t) = E_t[\beta \cdot u'(c_{t+1}) \cdot x_{t+1}]$$

Wynika z tego, iż wartość aktywu na dzień dzisiejszy wynosi:

$$p_t = E_t\left[\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot x_{t+1}\right]$$

Cochrane (2001, s. 8) kontynuuje rozważania wprowadzając pojęcie stochastycznego czynnika dyskontującego (*stochastic discount factor*) zdefiniowanego jako:

$$m_{t+1} \equiv \beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

Tym samym cena danego aktywu dzisiaj jest aktualną wartością oczekiwaną przyszłej wypłaty (x_{t+1}) skorygowanej o przyszłą wartość stochastycznego czynnika dyskontującego (m_{t+1}):

$$p_t = E_t[m_{t+1} \cdot x_{t+1}]$$

Stopa zwrotu R_{t+1} z takiej inwestycji wynosić będzie zatem:

$$R_{t+1} \equiv \frac{x_{t+1}}{p_t} = \frac{x_{t+1}}{E_t[m_{t+1} \cdot x_{t+1}]}$$

Dla aktywu o cenie jednostkowej 1 otrzymujemy następujący związek:

$$1 = E_t[m_{t+1} \cdot x_{t+1}]$$

Istnieje zatem nieskończona liczba możliwych kombinacji przyszłych wartości stochastycznego czynnika dyskontującego i wypłaty mających wartość bieżącą 1. W przypadku inwestycji w aktywa pozbawione ryzyka, przyszła wypłata x_{t+1} jest znana już dzisiaj. Zakładając, dla wygody obliczeń, że jest to wypłata jednostkowa ($x_{t+1}=1$), otrzymujemy następujący związek pomiędzy stopą zwrotu z aktywów w inwestycje pozbawione ryzyka (*risk free rate of return*; w skrócie – stopa wolna od ryzyka) a stochastycznym czynnikiem dyskontującym:

$$R^f = \frac{x_{t+1}}{E_t[m_{t+1} \cdot x_{t+1}]} = \frac{1}{E_t[m]}$$

Zatem, oczekiwana wartość stochastycznego czynnika dyskontującego jest w tym wypadku odwrotnością stopy wolnej od ryzyka:

$$E_t[m] = \frac{1}{R^f}$$

Korzystając z tej definicji, możemy stwierdzić, iż kowariancja między stochastycznym czynnikiem losowym m (możemy pominąć tutaj subskrypty czasowe) i przyszłą wypłatą wynosi:

$$\mathrm{cov}(m, x) = E(m \cdot x) - E(m) \cdot E(x)$$

zatem:

$$E(m \cdot x) = E(m) \cdot E(x) + \mathrm{cov}(m, x)$$

Wprowadzając tę informację do wartości ceny aktywu, możemy przedstawić ją jako:

$$p = E(m \cdot x) = E(m) \cdot E(x) + \mathrm{cov}(m, x)$$

Wyrażając E(m) jako odwrotność stopy wolnej od ryzyka, otrzymujemy, iż:

$$p = \frac{1}{R^f} \cdot E(x) + \operatorname{cov}(m, x)$$

Cochrane (2001, s. 15) wskazuje, iż pierwszy człon powyższego równania to cena aktywu, jaka istniałaby w przypadku świata bez ryzyka. Ponieważ jednak ryzyko w świecie realnym istnieje, cena ta jest skorygowana o drugi człon równania, tzw. korektę na ryzyko (*risk adjustment*).

Wyrażając powyższy związek w kategoriach konsumpcji bieżącej i obecnej otrzymujemy:

$$p = \frac{E(x)}{R^f} + \frac{\operatorname{cov}[\beta \cdot u'(c_{t+1}), x_{t+1}]}{u'(c_t)}$$

Cochrane (2001, s. 16) stwierdza, że w przypadku aktywu, którego wypłata jest pozytywnie skorelowana z konsumpcją, jego cena jest obniżona (krańcowa stopa użyteczności z konsumpcji maleje wraz z jej wzrostem). Dzieje się tak ponieważ konsumenci wykazują awersję do ryzyka definiowanego nie jako zmienność (wyrażana np. przez odchylenie standardowe[1]) aktywu, lecz jako zmienność w poziomie przyszłej konsumpcji. Zakupiony aktyw o wypłacie skorelowanej negatywnie z konsumpcją „pomaga wygładzać konsumpcję i jest bardziej wartościowy niż wskazywałaby na to jego wypłata" (Cochrane, 2001, s. 16). Jest to więc przypadek ubezpieczenia, które uruchamia „wypłatę" dokładnie w sytuacji, gdy wartości naszego majątku i konsumpcji ulegają obniżeniu na skutek szkody spowodowanej realizacją zdarzenia losowego. Jak pisze Cochrane (2001, s. 16): *„jesteśmy zadowoleni z posiadanego ubezpieczenia nawet mimo tego, że spodziewamy się utraty pieniędzy* (w postaci wpłaconej składki, przyp. DS) – [oraz] *mimo, że cena ubezpieczenia jest większa od oczekiwanej wartości wypłaty dyskontowanej stopą wolną od ryzyka"*.

Dyskontowanie przyszłych strumieni stopą wolna od ryzyka odbywa się w warunkach pewności. Wracamy zatem w ten sposób do związku pomiędzy użytecznością z majątku pomniejszonego o stratę pewną, czyli składkę, a wartością oczekiwaną użyteczności z majątku nie chronionego kontraktem ubezpieczeniowym. Jest to związek opisany w poprzedniej sekcji.

5. Niedoubezpieczenie w świetle teorii finansów

Niedoubezpieczenie spowodowane obniżeniem standardu ochrony ubezpieczeniowej obniża wypłatę x_{t+1} z aktywu ubezpieczeniowego w momencie powstania straty. To zwiększa

[1] Cochrane (2001, ss. 16-17) pokazuje, iż ryzyko wiąże się z kowariancją wypłaty i stochastycznego czynnika dyskontującego. Wariancja zmienności poziomu wypłaty jest praktycznie pomijalna i nie ma wpływu na zmienność konsumpcji.

zakres zmienności możliwego wyniku, co powoduje, iż ochrona ubezpieczeniowa staje się bardziej wartościowa. Dlatego też ubezpieczony jest skłonny dokupić dodatkową liczbę aktywów ubezpieczeniowych, tak, aby oczekiwany strumień z aktywów ubezpieczeniowych powrócił do poprzedniej wartości. W przypadku, gdy mamy do czynienia z „uniwersalnym” aktywem „produkowanym” przez system zabezpieczenia społecznego, masowy popyt na dodatkowe aktywa oferujące ubezpieczenie może wywołać znaczny wzrost ich ceny w krótkim okresie, co dodatkowo obniży stopę zwrotu z ubezpieczenia. Poziom wzrostu ceny zależeć będzie od elastyczności cenowych popytu i podaży. Zakładając brak znaczących zmian w poziomie awersji do ryzyka, możemy przyjąć, że konsument dokupi brakującą część aktywów ubezpieczeniowych.

W przypadku niedoubezpieczenia powstałego na skutek wzrostu wartości majątku, reakcja dotycząca zakupów będzie zależna od ceny ubezpieczenia, ta zaś związana jest z preferencjami względem konsumpcji bieżącej, przyszłej i awersji do ryzyka. Zazwyczaj wyższy majątek obniża dotkliwość ewentualnych strat wywołanych powstaniem szkody, dlatego też relatywna awersja do ryzyka maleje. W ekstremalnych wypadkach (znaczący przyrost majątku) ubezpieczony może nawet sprzedać część swoich aktywów ubezpieczeniowych. Jego lokalna funkcja użyteczności może być „odwrócona”, co generować będzie popyt na „małe” zachowania hazardowe (przykładem jest kupowanie losów loteryjnych za niewielkie kwoty mimo, iż gra jest znacząco „niesprawiedliwa”).

Bibliografia:

Bennet, Carol, (1992), Dictionary of Insurance, Financial Times Pitman Publishing: London, ss. 385.

Cochrane, John H. (2001), Asset pricing, Princeton University Press: Woodstock.

Gollier, Christian (2001), The Economics of Risk and Time, MIT Press: Cambridge MA, Oxford.

Luenberger, David G. (1998), Investment science, Oxford University Press: New York, Oxford.

Makdissi, Paul and Quetin Wodon (2003), Risk Adjusted Measures of Wage Inequality and Safety Nets, Economics Bulletin, Vol. 9(1), ss. 1-10, http://www.economicsbulletin.uiuc.edu/2003/volume9/EB-03I30001A.pdf.

McAfee, Preston R. (2005), Introduction to Economic Analysis, Creative Commons Organisation, www.introecon.com, wersja z 14 grudnia 2005 r.

McAfee, Preston R. i Vincent, Daniel (1993), The Price Decline Anomaly, Journal of Economic Theory, Vol. 60, June, ss. 191-212.

Pratt, John W. (1964), Risk Aversion in the Small and in the Large, Econometrica, Vol 32(1/2), ss. 122-136.